

Série 5

Exercice 19. Soient $A, B, A_1, \dots, A_n$ des événements définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, et soit $I_A, I_B, I_1, \dots, I_n$ les variables indicatrices correspondantes.

- a) Démontrer que $E(I_A) = \Pr(A)$.
- b) Démontrer que $I_{A \cap B} = I_A I_B$ et que $I_{A \cup B} = 1 - (1 - I_A)(1 - I_B)$.
- c) Démontrer que $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - I_j)$, et en déduire la formule d'inclusion-exclusion.
- d) Soient A_j les événements 'face au j ème essai', dans une série de n lancers indépendants d'une pièce avec probabilité de face p . Donner la loi de $I_1 + \dots + I_n$ et trouver son espérance.
- e) Soient A_j les événements 'la j ème boule est blanche' quand je tire m boules au hasard et sans remise d'une boîte contenant b boules blanches et n boules noires. Donner la loi de $I_1 + \dots + I_m$ et trouver son espérance.

Solution 19. a) La variable indicatrice est définie pour $\omega \in \Omega$ par :

$$\mathbf{I}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

donc $E(\mathbf{I}_A) = \sum_{\omega} \mathbf{I}_A(\omega) \Pr(\{\omega\}) = \Pr(A)$.

b) i)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A(\omega) \mathbf{I}_B(\omega) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B, \\ 0 & \text{si } \omega \notin B. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \cap B, \\ 0 \times 1 & \text{si } \omega \in A^c \cap B, \\ 1 \times 0 & \text{si } \omega \in A \cap B^c, \\ 0 \times 0 & \text{si } \omega \in A^c \cap B^c. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \cap B, \\ 0 & \text{si } \omega \in (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cap B)^c. \end{cases} \\ &= \mathbf{I}_{A \cap B}(\omega) \end{aligned}$$

ii) En écrivant $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{A \cup B}(x) &= \mathbf{I}_{A \cup B^c} + \mathbf{I}_{A^c \cup B} - \mathbf{I}_{A \cap B}, \text{ puisque les événements sont disjoints} \\ &= \mathbf{I}_A \mathbf{I}_{B^c} + \mathbf{I}_{A^c} \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A \mathbf{I}_B, \text{ en utilisant i)} \\ &= \mathbf{I}_A(1 - \mathbf{I}_B) + (1 - \mathbf{I}_A) \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A \mathbf{I}_B \\ &= \mathbf{I}_A(1 - \mathbf{I}_B) + (1 - \mathbf{I}_A) \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A \mathbf{I}_B \\ &= 1 - (1 - \mathbf{I}_A)(1 - \mathbf{I}_B). \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} &= 1 - \mathbf{I}_{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)^c} \\ &= 1 - \mathbf{I}_{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right)} \\ &= 1 - \prod_{j=1}^n (1 - \mathbf{I}_j). \end{aligned}$$

En développant le produit on obtient

$$\sum_j \mathbf{I}_j - \sum_{j \neq k} \mathbf{I}_j \mathbf{I}_k + \sum_{i \neq j \neq k} \mathbf{I}_i \mathbf{I}_j \mathbf{I}_k + \cdots + (-1)^{n+1} \prod_{j=1}^n \mathbf{I}_j = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \mathbf{I}_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

et appliquant l'espérance, on obtient la formule d'inclusion-exclusion

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = E(\mathbf{I}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \Pr(A_I),$$

où $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$.

- d) Écrivant $X(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i(x)$, on a par conséquent $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

X dans ce cas représente le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli de longueur n et suit la loi binomiale, $X \sim \text{Binomial}(n, p)$. Ainsi $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$, comme vous avez vu pendant un cours (avec plus d'algèbre).

- e) On tire $m \in \{1, \dots, b+n\}$ boules au hasard et sans remise d'une boîte contenant $b = p(b+n)$ boules blanches (gagnantes) et $n = (1-p)(b+n)$ boules noires (perdantes). Donc la probabilité de gagner sur un seul essai est $p = b/(b+n)$, et

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^m I_i\right) = m \Pr(I_i = 1) = m \Pr(\text{je tire une boule blanche}) = m \frac{b}{b+n}.$$

En fait X dans ce cas suit la loi hypergéométrique de paramètres $(m, p, n+b)$.

Exercice 20. Pendant un tour d'Irlande à vélo j'achète six boîtes de nourriture, deux de soupe, deux de ragoût et deux de fruit. Il pleut averse, et les boîtes perdent leurs étiquettes et deviennent indistinguables. Si j'en choisis trois au hasard pour mon repas du soir, trouver la distribution du nombre de boîtes de fruit que j'ouvre. Quelle est la probabilité que j'ouvre une boîte de chaque type de nourriture ?

Solution 20. i) Par analogie avec l'exercice 1, les boules blanches correspondent aux boîtes de fruits, les boules noires correspondent aux reste des boîtes. On a $w = 2$, $b = 4$ et je vais tirer $m = 3$. Alors, le nombre de boîtes de fruits X tirées suit la loi

$$\Pr(X = x) = \frac{\binom{2}{x} \binom{4}{3-x}}{\binom{6}{3}}, \quad x = 0, \dots, 2.$$

Ainsi $\Pr(X = 0) = 1/5$, $\Pr(X = 1) = 3/5$, $\Pr(X = 2) = 1/5$.

- ii) Soient X et Y les nombres de boîtes de fruits et de la soupe. J'ouvre 3 boîtes au hasard, et je cherche $\Pr(X = 1, Y = 1)$, car si $X = Y = 1$, alors j'ouvre aussi une boîte de ragoût. Donc la probabilité que j'ouvre une boîte de chaque type de nourriture est

$$\Pr(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{2}{5},$$

car il y a $\binom{6}{3} = 20$ échantillons de trois boîtes parmi les six, tous équi-probables, et pour que $X = Y = 1$, on doit choisir une boîte de chaque paire.

Exercice 21. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\Pr(X = x_j) = p_j$ ($j = 1, \dots, n$). On définit l'entropie de X par $h(X) = -\sum_{j=1}^n p_j \ln p_j$. Remarquons que $0 \ln 0 = 0$.

- a) Calculer $h(X)$ si X est constante.
- b) Calculer $h(X)$ si X est équi-distribuée.
- c) Trouver l'entropie maximale si le support S_X contient n valeurs.

Solution 21. a) Si X est une variable aléatoire constante, alors elle ne prend qu'une seule valeur x_1 avec probabilité $p_1 = 1$. Ainsi,

$$h(X) = -1 \ln(1) = 0.$$

- b) Si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ on a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $p_i = \Pr(X = x_i) = \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$h(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = -\ln \frac{1}{n} = \ln n$$

- c) On veut maximiser $-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. On utilise les multiplicateurs de Lagrange, donc on trouve les dérivées de

$$L = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right),$$

c'est à dire

$$\frac{dL}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n p_i - 1 = 0, \quad \frac{dL}{dp_i} = -1 - \ln p_i + \lambda = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Donc $p_i = \exp(\lambda - 1)$ ne dépend pas de i , et ainsi $p_i = 1/n$, car $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Les deuxième dérivées par rapport aux p_i étant négatives, cette solution donne bien un maximum de $\ln n$, correspondant à la loi uniforme de la partie b) de l'exercice.

Sinon, on peut argumenter comme suite. Soit f une fonction réelle définie sur le support S_X à n valeurs. On admet que si f est concave, alors

$$f\left(\frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right) \geq \frac{f(p_1) + \dots + f(p_n)}{n}, \quad \forall p_1, \dots, p_n \in S_X$$

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ par, $f(x) = -x \ln(x)$ Alors f est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et sa dérivée seconde est :

$$f''(x) = -\frac{1}{x} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+$$

On en déduit que la fonction est concave. On applique l'inégalité de l'énoncé, en multipliant à gauche et à droite par n , avec la fonction f ci-dessus, et les $p_1, \dots, p_n$ de la loi de X . Alors

$$h(x) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^n f(p_i) \leq n f\left(\frac{p_1 + \dots + p_n}{n}\right)$$

Comme les $p_1, \dots, p_n$ définissent une probabilité, on a $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Ainsi,

$$h(x) \leq n f\left(\frac{1}{n}\right) = -n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n$$

D'après la question b) le membre de droite correspond à l'entropie d'une variable aléatoire de loi uniforme, on en déduit qu'elle est d'entropie maximale.

Exercice 22. Soit X une variable aléatoire discrète avec support $1, 2, \dots$. Montrer que $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \Pr(X \geq x)$ si l'espérance existe.

- a) En déduire l'espérance d'une variable aléatoire de loi géométrique.
- b) Avant de commencer la procédure de naturalisation, vous devez collectionner un exemplaire de chacune de n figurines de politiciens suisses renommés. Chaque boîte de votre muesli préféré contient une figurine, et les figurines sont équiprobables. La loi vous interdit d'échanger de figurines avec vos amis ou d'en acheter sur le marché noir. Quelle est l'espérance du nombre de boîtes de muesli que vous devrez manger avant d'entamer la procédure ?

Solution 22. On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \Pr(X = x) \\ &= 1 \times \Pr(X = 1) + 2 \times \Pr(X = 2) + 3 \times \Pr(X = 3) + \dots \\ &= \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \dots \\ &\quad + \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \dots \\ &\quad + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \dots \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \Pr(X \geq x). \end{aligned}$$

- a) Soit on remarque que

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq x) &= \Pr(X = x) + \Pr(X = x + 1) + \Pr(X = x + 2) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr(X = x + i) = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^{x+i-1} p \\ &= p(1 - p)^{x-1} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i \\ &= p(1 - p)^{x-1} \frac{1}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^{x-1}, \end{aligned}$$

sinon que $X \geq x$ si et seulement si on n'a pas de succès parmi les premiers $x - 1$ essais indépendants, un événement dont la probabilité est de $(1 - p)^{x-1}$. On obtient par conséquent,

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \Pr(X \geq x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1 - p)^{x-1} = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}.$$

- b) Soit N le nombre de boîtes de muesli qu'il faut ouvrir afin de collectionner chacune des n figurines. On peut écrire $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$, où N_1 est le nombre qu'il faut ouvrir pour obtenir la première figurine, N_2 est le nombre qu'il faut ensuite ouvrir pour obtenir une figurine différente de la première, et ainsi de suite. Donc N_n est le nombre qu'il faut ouvrir pour obtenir la seule figurine manquante quand on a déjà au moins une copie de chacune des $n - 1$ autres. Ainsi N_1 est une variable aléatoire géométrique de probabilité $n/n = 1$, N_2 une variable aléatoire géométrique de probabilité $(n - 1)/n$, ... et N_n une variable aléatoire géométrique de probabilité $1/n$. On obtient

$$E(N) = \sum_{i=1}^n E(N_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n - i + 1)/n} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - i + 1} = n H_n \approx n \ln n,$$

où H_n est la série harmonique d'ordre n .

Exercice 23. Le professeur Tournesol propose à Dupond et Dupont le jeu suivant. Il a deux enveloppes identiques, dont l'une contient un billet de banque et l'autre une coupure dont la valeur est le double du premier billet. Tournesol lance une pièce non truquée pour décider quelle enveloppe donner à Dupond, l'autre enveloppe étant remise à Dupont. Les Dupond et Dupont ont le droit d'échanger leurs enveloppes s'ils veulent. Dupond raisonne que si son enveloppe contient a , alors l'autre contient soit $2a$, soit $a/2$, avec probabilité $1/2$. Donc, suite à un échange des enveloppes, l'espérance de son gain sera $(2a + a/2)/2 > a$. Il conclut qu'il lui est avantageux d'échanger avec Dupont, lequel fait le même raisonnement et accepte l'échange. Ont-ils raison ?

Solution 23. Quand on tombe sur un paradoxe probabiliste, il faut toujours commencer en posant $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$.

Soit (d, t) l'argent se trouvant dans les enveloppes de (Dupond, Dupont). Alors on a $(d, t) \in \Omega = \{(a, 2a), (2a, a)\}$. Les deux possibilités ont probabilités de $1/2$, donc si D et T notent l'argent de Dupond et Dupont quand ils reçoivent leurs enveloppes, on a

$$E(D) = a \times \frac{1}{2} + 2a \times \frac{1}{2} = \frac{3a}{2}, \quad E(T) = 2a \times \frac{1}{2} + a \times \frac{1}{2} = \frac{3a}{2} :$$

il n'est pas possible de gagner en espérance en échangeant les enveloppes.

L'erreur provient du fait que Dupond suppose que les deux possibilités pour (d, t) sont $(a, 2a)$ et $(a, a/2)$; il ne remarque pas que a ne peut pas être à la fois le plus petit et le plus grand des montants.

Moralité : pour probabilité sans difficultés, bien considérer Ω , $\mathcal{F}$ et P !